

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

zakh@cs.msu.su

Лекция 4.

Подстановки.

Табличный вывод.

Корректность табличного вывода.

ПОДСТАНОВКИ

Подстановка — это всякое отображение $\theta : Var \rightarrow Term$, сопоставляющее каждой переменной некоторый терм.

Подстановки нужны для того, чтобы иметь возможность переходить от общих утверждений $\forall x \forall y P(x, y)$ к их частным вариантам $P(f(z), c)$.

Множество $Dom_\theta = \{x : \theta(x) \neq x\}$ называется **областью подстановки**. Если область подстановки — это конечное множество переменных, то такая подстановка называется конечной. Множество конечных подстановок обозначим **Subst**.

Если $\theta \in Subst$ и $Dom_\theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то подстановка θ однозначно определяется множеством пар

$$\{x_1/\theta(x_1), x_2/\theta(x_2), \dots, x_n/\theta(x_n)\}.$$

Каждая пара $x_i/\theta(x_i)$ называется **связкой**.

ПОДСТАНОВКИ

Для заданного логического выражения E и подстановки θ запись $E\theta$ обозначает **результат применения подстановки θ к E** , который определится так:

Если $E = x$, $x \in Var$, то $E\theta = \theta(x)$;

Если $E = c$, $c \in Const$, то $E\theta = c$;

Если $E = f(t_1, t_2, \dots, t_k)$, то $E\theta = f(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_k\theta)$;

Если $E = P(t_1, t_2, \dots, t_k)$, то $E\theta = P(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_k\theta)$;

Если $E = \varphi \& \psi$, то $E\theta = \varphi\theta \& \psi\theta$

(аналогично для формул $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\neg \varphi$);

Если $E = \forall x_0 \varphi$, то $E\theta = \forall x_0 (\varphi\theta')$, где θ' — новая подстановка, удовлетворяющая условию

$$\theta'(x) = \begin{cases} x_0, & \text{если } x = x_0, \\ \theta(x), & \text{если } x \neq x_0, \end{cases}$$

(аналогично для формул $\exists x_0 \varphi$).

ПОДСТАНОВКИ

Пример

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists yP(y)$$

$$\theta = \{ x/g(x, c), y/x, z/f(z) \}$$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists yP(y)$$

К свободным вхождениям переменных применяется θ

$$\varphi\theta : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x)) \rightarrow R(f(g(x, c))) \vee \exists yP(y)$$

ПОДСТАНОВКИ

В результате применения некоторых подстановок смысл утверждений (формул) может значительно исказиться.

«Если у каждого есть дед, то у субъекта x тоже есть дед»

$$\varphi(x) : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(x, y)$$

Очевидно, $\models \varphi(x)$

Применим к $\varphi(x)$ подстановку $\theta = \{ x/y \}$

$$\varphi(x)\theta : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$$

«Если у каждого есть дед, то есть и такие, которые приходятся дедом самим себе»

Очевидно, $\not\models \varphi(x)\theta$

Как странно: общее утверждение $\varphi(x)$ верно, а его частный случай $\varphi(x)\theta$ — нет.

ПОДСТАНОВКИ

Переменная x называется **свободной для терма t** в формуле $\varphi(x)$, если любое свободное вхождение переменной x в формуле $\varphi(x)$ не лежит в области действия ни одного квантора, связывающего переменную из множества Var_t .

Подстановка $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ называется **правильной для формулы φ** , если для любой связки x_i/t_i переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ .

Пример

Переменная y не является свободной для терма $f(x, z)$ в формуле φ

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists y P(y)$$

А вот для терма $f(y, z)$ переменная y в формуле φ свободна.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода имеют вид

$$\frac{T_0}{T_1} \quad \text{или} \quad \frac{T_0}{T_1, T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы. Прочтение правила таково:

Таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или T_2).

В тех случаях, когда таблица T_0 редуцируется в пару таблиц T_1, T_2 , будем говорить, что правило имеет альтернативы.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$$L\& \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\& \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \varphi, \Delta \rangle}$$

$$R\rightarrow \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg \quad \frac{\langle \Gamma, \neg \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg \varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$$L\forall \quad \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} | \Delta \rangle}$$

переменная x свободна для терма t
в формуле $\varphi(x)$

$$R\forall \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \forall x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi(x)\{x/c\} \rangle}$$

константа c не содержится в формулах
из Γ , Δ и в формуле $\varphi(x)$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$$L\exists \quad \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x) \{x/c\} | \Delta \rangle}$$

константа c не содержится в формулах из Γ , Δ и в формуле $\varphi(x)$

$$R\exists \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x) \{x/t\} \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(x)$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы
в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если в правиле табличного вывода $L\forall$ не придерживаться
правильных подстановок, то **выполнимая таблица**

$$- L\forall : \frac{\langle \forall x \exists y R(x, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}{\langle \forall x \exists y R(x, y), \exists y R(y, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу**.

Причина в том, что переменная x несвободна для терма y в формуле $\exists y R(x, y)$.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы
в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если в правиле табличного вывода $L\exists$ подставить «несвежую» константу, то **выполнимая таблица**

$$- L\exists : \frac{\langle \exists x P(x) \mid P(c) \rangle}{\langle P(c) \mid P(c) \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу** .

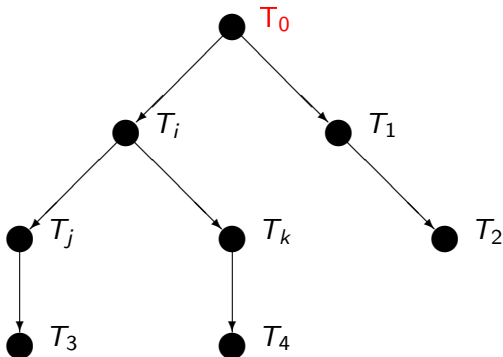
Причина в том, что константа, подставляемая вместо переменной x , должна быть отлична от всех ранее использованных констант.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, вершинами которого служат семантические таблицы и при этом

- 1) корнем дерева является таблица T_0 ;

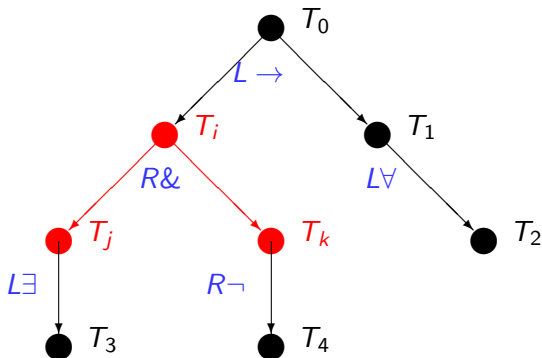


ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

2) из вершины T_i исходят дуги в вершины T_j (T_k)

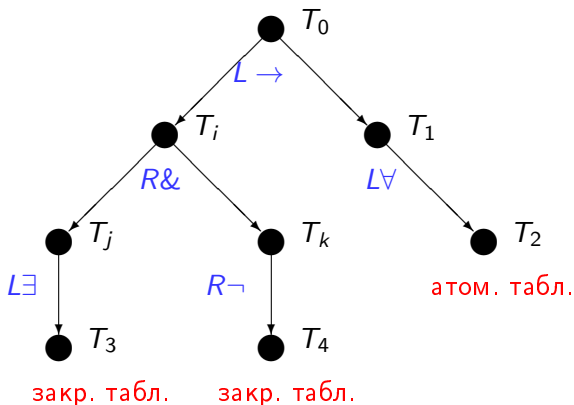
$\iff \frac{T_i}{T_j, (T_k)}$ — правило табличного вывода;



ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

- 3) листьями дерева могут быть только закрытые и атомарные таблицы.



ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

Табличный вывод будем называть **успешным** (или **табличным опровержением**), если дерево вывода — конечное, и все листья дерева — закрытые таблицы.

Существование успешного вывода означает, что корневая семантическая таблица T_0 невыполнима.

Если $T_0 = \langle \emptyset \mid \varphi \rangle$, то это означает, что $\models \varphi$.

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

$$\begin{array}{c}
 T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle \\
 \downarrow (R \rightarrow) \\
 T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle
 \end{array}$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

$\downarrow$ ($R \rightarrow$)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

$\downarrow$ ($R \rightarrow$)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

(R $\rightarrow$)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

(R $\rightarrow$)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

(R $\forall$)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

(L $\forall$)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L $\forall$)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L $\rightarrow$)

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c) \mid \forall xP(x), B(c), P(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c), P(c) \mid \forall xP(x), P(c) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

(R $\rightarrow$)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

(R $\rightarrow$)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

(R $\forall$)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

(L $\forall$)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L $\forall$)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L $\rightarrow$)

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c) \mid \forall xP(x), B(c), P(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c), P(c) \mid \forall xP(x), P(c) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \rangle$$

$$\downarrow \quad (R \rightarrow)$$

$$T_1 = \langle \exists x P(x) \mid \forall x P(x) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \rangle$$

↓ $(R \rightarrow)$

$$T_1 = \langle \exists x P(x) \mid \forall x P(x) \rangle$$

↓ $(L\exists)$

$$T_2 = \langle P(c_1) \mid \forall x P(x) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \rangle$$

↓ $(R \rightarrow)$

$$T_1 = \langle \exists x P(x) \mid \forall x P(x) \rangle$$

↓ $(L\exists)$

$$T_2 = \langle P(c_1) \mid \forall x P(x) \rangle$$

↓ $(R\forall)$

$$T_3 = \langle P(c_1) \mid P(c_2) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$\downarrow (R \rightarrow)$$

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$\downarrow$ ($R \rightarrow$)

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$\downarrow$ ($L\forall$)

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R →)

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(L ∀)

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R ∃)

$$T_3 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R →)

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(L∀)

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R∃)

$$T_3 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(L∃)

$$T_4 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R∀)

$$T_5 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid P(c_2, c_4), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$



∞

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Лемма о корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, LV, RV, L\exists, R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1, (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2).

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L \rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}.$

Таблица $\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle$ выполнима $\iff$
существует интерпретация I и набор $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models (\varphi \rightarrow \psi)[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \text{ или } I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \end{aligned}$$

одна из таблиц $T_1 = \langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle$ или $T_2 = \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle$ выполнима.

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Аналогично доказывается корректность остальных 7 правил для логических связок

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\forall$:
$$\frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle}.$$

Таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$ выполнима $\iff$ существует интерпретация I и набор $d_1, \dots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases} \quad \text{Пусть } d_0 = t[d_1, \dots, d_n]. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] &\Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n] \Rightarrow \\ &\Rightarrow I \models \varphi[t[d_1, \dots, d_n], d_1, \dots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi\{x_0/t\}[d_1, \dots, d_n]. \end{aligned}$$

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации I .

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что переменная x_0 свободна для терма t в формуле φ ?

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x) \{x/c\} | \Delta \rangle}$.

Очевидно, что выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \varphi(x) \{x/c\} | \Delta \rangle$ влечет выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$

Допустим, что выполнима таблица $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$. Тогда существует интерпретация I и набор $d_1, \dots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\exists x \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

Выполнимость $\exists x \varphi[d_1, \dots, d_n]$ означает, что существует такой элемент $d_0 \in D_I$, что $I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n]$.

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию J , которая отличается от I , только тем, что в J константа c имеет другое значение, а именно $\bar{c} = d_0$.

Тогда $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \dots, d_n]$.

Кроме того, $J \models \Gamma[d_1, \dots, d_n]$ и $J \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n]$.

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации J .

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что константа c не входит в состав формул из Γ , Δ и формулы φ ?

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема корректности табличного вывода

Если для семантической таблицы T_0 существует успешный табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима.

Доказательство

Следует из

- ▶ определения табличного вывода,
- ▶ леммы о корректности правил табличного вывода,
- ▶ и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц.

Следствие

Если для таблицы $T_\varphi = \langle \emptyset \mid \varphi \rangle$ можно построить успешный табличный вывод, то $\models \varphi$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 4.